

Incidence de la pesanteur sur la formule de Stokes

par Jean-François WAX et Jean-Louis BRETONNET

Laboratoire de chimie et physique – Approche multi-échelles des milieux complexes (LCP-A2MC)

Université de Lorraine – 57000 Metz

jean-francois.wax@univ-lorraine.fr

jean-louis.bretonnet@univ-lorraine.fr

CETTE NOTE est un additif à notre article publié dans *Le Bup* n° 1065 de juin 2024 [1] et qui traitait de l'établissement de la formule de Stokes donnant l'expression de la force de frottement exercée sur une sphère par un fluide visqueux. Ici, nous introduisons l'effet de la gravité qui était initialement négligée et montrons comment la poussée d'Archimède apparaît comme un terme supplémentaire dans l'expression de l'action du fluide sur la sphère. Les conditions de validité de ce développement sont discutées, de même que les situations pour lesquelles il ne s'applique pas, tel que les cas de migration radiale.

INTRODUCTION

Dans un article précédent [1], nous nous étions penchés sur l'établissement de l'expression de la formule de Stokes et ses conditions de validité dans le cas d'une sphère de rayon R immergée dans un fluide de masse volumique ρ , de viscosité η et s'écoulant à une vitesse relative V_0 par rapport à la bille. Nous avons retrouvé le résultat bien connu de la force de frottement

$$F = 6\pi\eta R V_0$$

valable pour des situations correspondant à des nombres de Reynolds $Re = \rho R V_0 / \eta$ inférieurs à l'unité.

Dans notre raisonnement, nous avons négligé la présence de la pesanteur et de sa conséquence pour un corps immergé dans un fluide : la poussée d'Archimède. En effet, dans le traitement du problème complet, il est habituel de découpler les deux effets, bien que tous deux proviennent de l'interaction de la sphère avec le fluide.

Interpellés à ce sujet par notre collègue David Rouvel, qui nous a demandé ce que deviendrait la formule de Stokes en présence du champ de pesanteur s'il était pris en compte dès le début du développement, nous avons donc repris notre raisonnement en incluant dès le départ l'action du champ de pesanteur. Dans ce qui va suivre, nous établissons ainsi que la force exercée en présence du champ de pesanteur par un fluide

visqueux sur une sphère en mouvements relatifs l'un par rapport à l'autre contient la force de Stokes et la poussée d'Archimède. Nous discuterons les conditions de validité de ce développement et, dans une dernière étape, nous examinerons quelques situations connues pour lesquelles ces hypothèses ne tiennent plus.

1. GÉNÉRALISATION DE LA DÉMARCHÉ

La figure 1 positionne l'écoulement du fluide avec une vitesse $\mathbf{V}_0$ en l'absence de la sphère de centre O , le champ de pesanteur dont la direction est décrite par les deux angles α et β , ainsi qu'un point M au voisinage de celle-ci repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Il y a donc deux effets simultanés, celui d'un écoulement forcé et celui de la pesanteur.

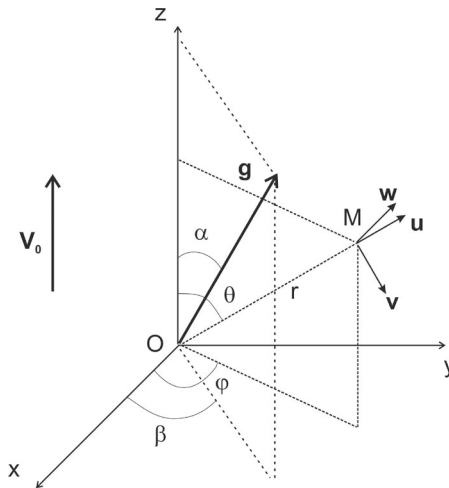


Figure 1 - Repère et coordonnées employés pour la description du problème.

Nous reprenons les étapes successives du raisonnement développé dans l'article précité. La formule de Stokes n'est valable que pour les très faibles nombres de Reynolds. Si l'on tient compte du champ de pesanteur $\mathbf{g}$, l'équation simplifiée de Navier-Stokes (Rel. 2 de [1]) s'écrit maintenant :

$$\text{grad } p = \eta \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}. \quad (1)$$

1.1. Détermination du champ de vitesses

Il est nécessaire ici de faire une hypothèse qu'il faudra discuter *a posteriori*. Dans l'étude initiale, il était totalement justifié de considérer que l'axe (Oz) était un axe de symétrie du problème, ce qui permettait d'affirmer que l'écoulement au voisinage de la

sphère était bidimensionnel (très concrètement, que la vitesse du fluide ne comportait pas de composante, selon $\mathbf{w}$). Ici, excepté dans le cas où $\mathbf{g}$ et $\mathbf{V}_0$ seraient parallèles, cette symétrie disparaît et il ne peut être exclu qu'une composante supplémentaire apparaisse.

Cependant, nous ferons l'hypothèse que cette composante demeure faible et nous la négligerons, ce qui revient à considérer le champ de vitesses comme bidimensionnel. Cette simplification sera discutée *a posteriori*.

Dès lors, le traitement tel qu'appliqué à la partie cinétique de l'équation de Navier-Stokes simplifiée dans l'article [1] peut être reproduit et, puisque $\mathbf{rot} \mathbf{g} = \mathbf{0}$, l'application du rotationnel à cette partie :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} p) = \mathbf{rot}(\eta \Delta \mathbf{V}) + \rho \mathbf{rot} \mathbf{g}$$

conduit à la même équation $\Delta(\mathbf{rot} \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{0} = \mathbf{0}$

qui se résout identiquement à l'aide de la fonction courant $\psi(r, \theta)$ de sorte que :

$$v_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta},$$

$$v_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

On retrouve ainsi le champ de vitesses décrit par les équations (27), (28) et (29) de l'article [1] :

$$\Psi(r, \theta) = V_0 \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R^3}{4r} - \frac{3Rr}{4} \right) \sin^2 \theta,$$

$$v_r(r, \theta) = V_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} - \frac{3R}{2r} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta(r, \theta) = V_0 \left(-1 + \frac{R^3}{4r^3} + \frac{3R}{4r} \right) \sin \theta.$$

1.2. Calcul de pression

Cette étape, indispensable au traitement de la partie dynamique du problème, s'effectue en résolvant l'équation de Navier-Stokes simplifiée (Rel. 1) qui peut se réécrire :

$$\mathbf{grad} p = \eta \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} = -\eta \mathbf{rot} \mathbf{0} + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

comme cela a été fait pour la relation (44) de l'article [1].

Pour étudier l'incidence de la pesanteur sur l'action d'un fluide visqueux sur une sphère, supposons que le champ de pesanteur $\mathbf{g}$ est dirigé dans une direction quelconque par rapport à l'écoulement. Les composantes du vecteur $\rho \mathbf{g}$ sur la base fixe sont

$$\rho \mathbf{g} = \rho g \sin \alpha \cos \beta \mathbf{i} + \rho g \sin \alpha \sin \beta \mathbf{j} + \rho g \cos \alpha \mathbf{k}.$$

Or, pour résoudre le système d'équations correspondant aux relations (45) et (46) de l'article précité, il faut projeter le vecteur $\rho \mathbf{g}$ sur le repère mobile $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, ce qui

donne :

$$\rho \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho g A \sin \theta + \rho g B \cos \theta \\ \rho g A \cos \theta - \rho g B \sin \theta \\ \rho g \sin \alpha \sin (\beta - \varphi) \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})},$$

où $A = \sin \alpha \cos (\beta - \varphi)$ et $B = \cos \alpha$. Ainsi, l'équation (2) équivaut maintenant aux trois équations suivantes qui sont la généralisation des relations (45) et (46) de l'article [1]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\eta b}{r^3} \cos \theta + \rho g A \sin \theta + \rho g B \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\eta b}{r^3} \sin \theta + \rho g A \cos \theta - \rho g B \sin \theta \quad (4)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\eta \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \Omega_\theta) - \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} \right] + \rho g \sin \alpha \sin (\beta - \varphi). \quad (5)$$

Alors que le second membre de la troisième était nul pour un écoulement bidimensionnel du fait que, dans le terme entre crochets, on a alors $\Omega_\theta = \Omega_r = 0$, la présence du champ de pesanteur ajoute un terme qu'il convient maintenant de prendre en compte. L'intégration de la relation (4) par rapport à θ fournit la solution :

$$p = \frac{\eta b}{r^2} \cos \theta + \rho g r A \sin \theta + \rho g r B \cos \theta + h(r, \varphi),$$

où la fonction $h(r, \varphi)$ est définie en identifiant la dérivée de p par rapport à r avec la relation (3), et la dérivée par rapport à φ avec la relation (5). On en déduit $h(r, \varphi) = C_{te}$. Après avoir remplacé le paramètre b par sa valeur $\left(b = -\frac{3}{2} V_0 R\right)$, on constate que l'expression de la pression au voisinage immédiat de la sphère ($r = R$) est maintenant :

$$p = -\frac{3}{2} \frac{\eta V_0}{R} \cos \theta + \rho g R A(\alpha, \beta, \varphi) \sin \theta + \rho g R B(\alpha) \cos \theta + C_{te}.$$

1.3. Force exercée par le fluide sur la sphère

Nous pouvons maintenant calculer la force qu'exerce le fluide sur la sphère (Rel. 39 de l'article [1]), force qui comporte maintenant trois composantes non nulles au lieu d'une seule :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi [(\sigma_{rr})_R \mathbf{u} + (\sigma_{r\theta})_R \mathbf{v}] \cdot \mathbf{i} R^2 \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \\ F_y = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi [(\sigma_{rr})_R \mathbf{u} + (\sigma_{r\theta})_R \mathbf{v}] \cdot \mathbf{j} R^2 \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \\ F_z = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi [(\sigma_{rr})_R \mathbf{u} + (\sigma_{r\theta})_R \mathbf{v}] \cdot \mathbf{k} R^2 \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \end{pmatrix}_{(i,j,k)}.$$

Dans ces expressions, les contraintes $(\sigma_{rr})_R$ et $(\sigma_{r\theta})_R$ (Rels. (42) et (43) de l'article [1]) s'écrivent maintenant :

$$(\sigma_{rr})_R = -p = \frac{3}{2} \frac{\eta V_0}{R} \cos \theta - \rho g R A(\alpha, \beta, \varphi) \sin \theta - \rho g R B(\alpha) \cos \theta - C_{te},$$

$$(\sigma_{r\theta})_R = -\frac{3}{2} \frac{\eta V_0}{R} \sin \theta.$$

Après avoir explicité les produits scalaires $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})$, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})$, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})$, $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})$, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{k})$ et $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ et en utilisant les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta &= \frac{2}{3}, \\ \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta &= 0, \\ \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta &= 0, \\ \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta &= \frac{4}{3}, \\ \int_0^{2\pi} \cos(\beta - \varphi) \cos \varphi \, d\varphi &= \pi \cos \beta, \\ \int_0^{2\pi} \cos(\beta - \varphi) \sin \varphi \, d\varphi &= \pi \sin \beta.\end{aligned}$$

on constate que $\mathbf{F}$ se réduit à :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x = -\frac{4}{3} \pi \rho g R^3 \sin \alpha \cos \beta \\ F_y = -\frac{4}{3} \pi \rho g R^3 \sin \alpha \sin \beta \\ F_z = 6\pi \eta R V_0 - \frac{4}{3} \pi \rho g R^3 \cos \alpha \end{pmatrix}_{(i, j, k)}.$$

On peut réécrire cette expression sous la forme

$$\mathbf{F} = 6\pi \eta R \mathbf{V}_0 - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \mathbf{g}. \quad (6)$$

Dans cette expression, on identifie sans surprise la force de frottement $\mathbf{F}_{\text{Sto}} = 6\pi \eta R \mathbf{V}_0$ exercée sur une sphère solide abandonnée dans un fluide visqueux, qui est dirigée dans la direction de l'écoulement et qui dépend de la viscosité du liquide, ainsi que la poussée d'Archimède $\mathbf{F}_{\text{Arc}} = -\frac{4}{3} \pi \rho R^3 \mathbf{g}$ qui est colinéaire et de sens opposé au champ de pesanteur $\mathbf{g}$.

2. DISCUSSION DE LA VALIDITÉ DU RÉSULTAT

Ce résultat, pour attendu qu'il soit, a été obtenu sur la base d'hypothèses qu'il nous faut maintenant discuter :

- ◆ Première hypothèse, nous avons supposé le fluide incompressible.
- ◆ Seconde hypothèse, l'écoulement est supposé caractérisé par un nombre de Reynolds $Re = \rho R V_0 / \eta < 1$.
- ◆ Troisième hypothèse, l'écoulement est supposé bidimensionnel.

Les deux premières ont déjà été discutées dans l'article initial [1]. La troisième, quant à elle, est nouvelle et assez délicate ; elle mérite qu'on s'y arrête ici. En effet, en l'absence de pesanteur, elle était totalement justifiée par le fait que la situation décrite possédait une symétrie de révolution du fait de la forme sphérique du solide et de l'uniformité de l'écoulement en l'absence de la bille. Ici, cette symétrie est mise à mal par la présence du champ de pesanteur.

2.1. Situations simples

Il existe une première situation où la symétrie est conservée et le développement rigoureux : celle où l'écoulement est parallèle au champ de pesanteur (dit autrement, lorsque $\mathbf{V}_0$ et $\mathbf{g}$ sont colinéaires). C'est notamment le cas de la bille qui chuterait verticalement dans un liquide ou qui remonterait à la surface sous l'action de la poussée d'Archimède. Dans notre développement, cela correspond aux cas où $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Cette situation mise à part, la symétrie est stricto sensu perdue, mais on peut néanmoins s'interroger sur les cas qui seraient très proches de la situation idéale.

Un élément à ne pas perdre de vue est d'abord que le champ de pesanteur agit bien sûr au niveau du fluide *via* la poussée d'Archimède, mais il agit aussi directement sur la sphère par son poids qui s'oppose à la première. Dès lors, l'effet à prendre en compte est la somme de ces deux forces et non la poussée d'Archimède seule, c'est-à-dire :

$$\mathbf{F}_{pes} = \mathbf{F}_{Arc} + m\mathbf{g} = \frac{4}{3}\pi(\rho_s - \rho)R^3\mathbf{g}$$

où ρ_s désigne la masse volumique de la sphère. On peut rappeler que, dans le cas d'une chute verticale dans un fluide au repos, la valeur limite vers laquelle tend la vitesse de la bille est :

$$V_L = \frac{|\mathbf{F}_{pes}|}{6\pi\eta R} = \frac{2R^2g|\rho_s - \rho|}{9\eta}. \quad (7)$$

Une première situation venant spontanément à l'esprit est celle où l'angle α entre $\mathbf{V}_0$ et $\mathbf{g}$ serait faible. Les trois forces $\mathbf{F}_{Arc}$, $m\mathbf{g}$ et $\mathbf{F}_{Sto}$ seraient alors quasi colinéaires et la relation (7) presque exacte. Une seconde correspondrait au cas où l'effet de la pesanteur serait beaucoup plus faible que celui de l'écoulement car, alors, le déplacement latéral de la bille par rapport à l'écoulement du fluide serait faible. Une troisième correspondrait au cas inverse, lorsque le déplacement causé par $\mathbf{F}_{pes}$ serait très important par rapport à V_0 ; en effet, cela induirait un mouvement relatif de la sphère et du fluide avec une vitesse dont la composante prépondérante ne serait plus $\mathbf{V}_0$ mais celle induite par $\mathbf{F}_{pes}$ dont un ordre de grandeur peut être obtenu en considérant V_L (relation (7)).

Afin de fixer les idées, nous avons regroupé dans le tableau 1 (cf. page ci-contre) des valeurs de V_L et du coefficient de Reynolds correspondant à quelques situations simples. Les valeurs des paramètres employés sont indicatives et nécessiteraient d'être affinées pour toute étude d'une situation particulière.

Ce tableau 1 illustre le fait que toutes les situations sont envisageables, allant de celles où l'influence de l'écoulement du fluide est négligeable ($V_L \gg V_0$) à celles où elle est prépondérante ($V_L \ll V_0$) face à l'effet de la pesanteur. Dans ces situations, on peut raisonnablement penser que l'écoulement autour de la sphère demeure bidimensionnel avec une bonne précision.

Fluide	Bille	$V_0 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$R (\text{m})$	Re	$V_L (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	V_L / V_0
Eau	Fer	0,1	0,01	0,015	993	9930
Eau	Fer	0,01	0,001	0,000015	9,93	993
Eau	Aluminium	0,01	0,001	0,000015	2,47	247
Eau	Fer	0,1	0,001	0,0015	9,93	99,3
Eau	Ébonite	0,01	0,001	0,000015	0,218	21,8
Huile	Fer	0,01	0,001	0,000765	0,178	17,8
Huile	Aluminium	0,01	0,001	0,000765	0,0462	4,62
Eau	Fer	0,01	0,0001	0,0000015	0,0993	9,93
Glycérine	Fer	0,01	0,001	0,011	0,0168	1,68
Huile	Ébonite	0,01	0,001	0,000765	0,00641	0,641
Glycérine	Aluminium	0,01	0,001	0,011	0,00369	0,369
Glycérine	Fer	0,1	0,001	0,11	0,0168	0,168
Glycérine	Aluminium	0,1	0,001	0,11	0,00369	0,0369
Glycérine	Ébonite	0,01	0,001	0,011	0,000282	0,0282

Tableau 1 - Évaluation de la vitesse limite pour quelques situations simples. Les paramètres employés sont les suivants : eau ($\eta=0,0015 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; $\rho=1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; huile ($\eta=0,085 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; $\rho=900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; glycérine ($\eta=0,85 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; $\rho=1260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; fer ($\rho=7830 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; aluminium ($\rho=2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ; ébonite ($\rho=1150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

En isolant la viscosité dans la relation (7), il est possible de mettre en œuvre une technique simple et rapide de mesure de la viscosité en étudiant la chute d'une bille dans un cylindre vertical rempli d'un liquide. Pour en déterminer la viscosité, on mesure le temps mis par la bille pour passer d'un premier repère à un second, ce qui permet d'estimer la vitesse limite ainsi que la viscosité du liquide

$$\eta = \frac{2R^2 g |\rho_s - \rho|}{9V_L} = \frac{K|\rho_s - \rho|}{V_L} \quad (8)$$

où K est appelée la constante de la bille. C'est le principe du viscosimètre à chute de bille.

Néanmoins, la méthode n'est utilisable que si la vitesse limite de la bille est atteinte, si le liquide est transparent et si la loi de Stokes est valable (huiles industrielles). Pour qu'une bonne précision soit atteinte, un certain nombre de corrections doit néanmoins être appliqué [2].

Le principe du viscosimètre à chute de bille est si simple qu'il a même été mis en œuvre dans des situations extrêmes. On peut ainsi mentionner les mesures de viscosité de métaux liquides faites sous très hautes pressions (quelques gigapascals (GPa)) à l'inté-

rieur d'une enclume-diamant [3-4]. Pour ce faire, un échantillon dont les dimensions sont de l'ordre du millimètre est serti entre les deux mâchoires d'une telle enclume ; une bille de platine est enfermée dans l'échantillon ; la cellule est retournée, ce qui permet à la bille de chuter au sein de l'échantillon ; la trajectoire de la bille est filmée à raison d'une image par milliseconde à l'aide d'un faisceau de rayons X généré par un synchrotron. Grâce à cette prouesse, des mesures de viscosité ont pu être réalisées à très hautes pressions sur un principe très simple, avec une précision variant entre 5 et 15 %.

Mais il existe aussi toute une gamme de situations où les deux effets sont du même ordre de grandeur et, dans ces cas, si les directions de $\mathbf{V}_0$ et $\mathbf{g}$ sont très différentes, un couplage des deux effets n'est pas à exclure.

2.2. Situations plus complexes

Dans ces situations plus complexes, d'autres effets apparaissent liés à la rotation de la bille que nous n'avons pas prise en compte. En effet, dès lors que l'écoulement n'est plus bidimensionnel au voisinage de la bille, il risque d'entraîner une rotation de celle-ci. Comme nous venons de le voir, cela peut résulter des directions différentes de la pesanteur et de la vitesse d'écoulement du fluide. La rotation de la bille peut aussi résulter de l'action seule du fluide. Par exemple, un profil de vitesses non uniforme peut aisément mettre la bille en rotation. Le traitement rigoureux de ces situations est très délicat et suppose pour chacune une analyse détaillée des différents paramètres entrant en jeu.

Un premier exemple qui illustre bien toute cette complexité est le cas du viscosimètre à chute de bille mentionné précédemment lorsque le tube n'est plus vertical, mais incliné (viscosimètre de Höppler). Ces appareils sont fréquemment employés et présentent l'avantage d'une meilleure garantie d'avoir une trajectoire de chute rectiligne en guidant la bille le long du bord du tube. Ils permettent aussi de contrôler la force de pesanteur et donc la vitesse de chute, puisque l'accélération mise en jeu est alors $(g \sin \alpha)$ où α est l'angle d'inclinaison du tube par rapport à l'horizontale. Cependant, du fait, d'une part, de la rotation de la bille qui roule le long de la paroi et, d'autre part, de la présence même du bord du tube qui contraint l'écoulement de ce côté de la bille (en contradiction évidente avec l'une des hypothèses permettant d'établir la formule de Stokes), les constructeurs de ces viscosimètres introduisent une correction empirique en l'absence d'expression théorique. Cette correction est déterminée par calibration de la constante des billes utilisées (K dans la relation (8)) sur des fluides de viscosités connues.

Un autre exemple correspond au phénomène de migration radiale pour lequel voici quelques résultats extraits de la littérature. Depuis l'observation de l'écoulement des globules rouges dans les vaisseaux sanguins par Jean-Léonard-Marie Poiseuille [5],

de nombreux travaux expérimentaux et théoriques ont été menés tout particulièrement sur la migration (déplacement) radiale des particules en suspension dans les conduites.

En préambule des travaux sur les suspensions, les premières expériences ont été effectuées sur le déplacement d'une sphère isolée dans les écoulements de Stokes de fluides newtoniens dans les cylindres droits et les premiers modèles analytiques de migration radiale ont été développés.

Une cause évidente, bien connue des joueurs de tennis de table, du déplacement radial d'une sphère rigide dans un écoulement est la rotation propre de la sphère. C'est l'effet Magnus. Le traitement théorique de ce problème effectué par S.I. Rubinow et Joseph B. Keller [6] a montré que la sphère subit une force orthogonale à la direction de l'écoulement et dont l'expression est $\mathbf{F} = \pi R^3 \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$, où R est le rayon de la sphère, $\boldsymbol{\Omega}$ son vecteur rotation, $\mathbf{v}$ sa vitesse qui, dans ce contexte, est l'opposée de la vitesse de l'écoulement, et ρ la masse volumique du fluide. Bien que cela n'apparaisse pas explicitement dans l'expression de la force radiale $\mathbf{F}$, la formule n'est valable qu'aux faibles nombres de Reynolds. L'effet Magnus s'explique par le fait que la rotation de la sphère sur elle-même produit une diminution de la pression du côté où la vitesse du liquide est la plus grande conformément à l'effet Venturi. Par conséquent, la sphère est attirée dans cette zone de dépression.

Les travaux sur la migration radiale d'une sphère dans un écoulement de Stokes ont suscité un intérêt particulier après que P.G. Saffman [7] a démontré que la sphère devait subir un déplacement radial vers le centre du cylindre lorsque le liquide est très visqueux. Par contre, un peu plus tard, F.P. Bretherton [8] démontrait que la sphère ne subissait pas de déplacement radial dans un écoulement où le nombre de Reynolds est nul. Ceci prouve l'importance de la valeur du nombre de Reynolds dans la migration radiale d'une sphère. En fait, les résultats sont très sensibles aux conditions dans lesquelles sont réalisées les expériences, comme l'ont montré G. Segré et A. Silberberg [9]. Dans certaines conditions expérimentales, ces auteurs ont observé que la sphère se plaçait dans une position d'équilibre se trouvant à $0,62 \times r$ de l'axe du tube de rayon r , en opposition avec la plupart des observations antérieures.

Pour un écoulement ascendant du liquide dans une conduite verticale, il a été montré dans l'article de M. Tachibana [10] que la particule se déplaçait vers la paroi ou restait au centre, selon les valeurs du rapport du rayon de sphère à celui du tube et du rapport de la densité du solide à celle du liquide. Une particule plus dense que le liquide a tendance à se mettre au centre de la conduite alors qu'une particule moins dense (s'élevant plus aisément) se déplace vers la paroi. Pour une particule flottante ($\rho_{\text{sol}} \sim \rho_{\text{liq}}$) aucun déplacement radial n'est observé, encore que le profil des vitesses (généralement parabolique) du liquide dans une section droite de la conduite puisse jouer un rôle important dans la migration radiale de la particule selon que la paroi soit

lisse ou rugueuse. Dans le cas d'une conduite horizontale, le déplacement radial d'une particule dépend encore plus fortement des densités ρ_{sol} et ρ_{liq} puisqu'une particule plus dense que le liquide a tendance à se déposer au fond de la conduite sous l'effet de la pesanteur.

Ces quelques éléments extraits de la littérature illustrent l'extrême sensibilité du comportement d'une sphère dans un écoulement aux détails de l'expérience et, par voie de conséquence, la complexité de la description de ce comportement dès lors que l'effet de la pesanteur entre en ligne de compte. Ces situations sont hors du cadre de notre étude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-F. Wax et J.-L. Bretonnet, « Démonstration de la formule de Stokes », Bull. Un. Prof. Phys. Chim., vol. 118, n° 1065, p. 523-538, juin 2024.
- [2] M. Brizard, M. Megharfi, E. Mahé and C. Verdier, "Design of a high precision falling-ball viscosimeter", Rev. Sci. Instrum., vol. 76, n° 2, 025109, February 2005.
- [3] Y. Kono, C. Kenney-Benson, D. Hummer, H. Ohfuji, C. Park, G. Shen, Y. Wang, A. Kavner and C.E. Manning, "Ultralow viscosity of carbonate melts at high pressures", Nat. Commun., 5, 5091, October 2014.
- [4] Y. Kono, C. Kenney-Benson, Y. Shibasaki, C. Park, G. Shen and Y. Wang, "High-pressure viscosity of liquid Fe and FeS revisited by falling sphere viscometry using ultrafast X-ray imaging", Phys. Earth Planet. Inter., vol. 241, p. 57-64, April 2015.
- [5] J.-L.-M. Poiseuille, Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les vaisseaux capillaires, Paris : Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 1, p. 554-560, 1835.
- [6] S.I. Rubinow and J.B. Keller, "The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid", J. Fluid Mech., vol. 11, p. 447-459, 1961.
- [7] P.G. Saffman, "The lift on a small sphere in a slow shear flow", J. Fluid Mech., vol. 22, p. 385-400, June 1965.
- [8] F.P. Bretherton, "The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number", J. Fluid Mech., vol. 14, p. 284-304, March 1962.
- [9] G. Segré and A. Silberberg, "Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow", J. Fluid Mech., vol. 14, p. 136-157, 1962.
- [10] M. Tachibana, "On the behaviour of a sphere in the laminar tube flows", Reol. Acta, vol. 12, p. 58-69, March 1973.



Jean-François WAX

Maître de conférences

Laboratoire de chimie et physique - Approche multi-échelle des milieux complexes (LCP-A2MC)

Université de Lorraine

Metz (Moselle)



Jean-Louis BRETONNET

Professeur émérite

Laboratoire de chimie et physique - Approche multi-échelle des milieux complexes (LCP-A2MC)

Université de Lorraine

Metz (Moselle)